LAHENDUSED   11. KLASS

1. Vastus: **40% soodsam**

Lahendus:

Olgu esialgne hind x ja hind kolmandal nädalal y.

Siis hind teisel nädalal on $0{,}9x$ ning hind neljandal nädalal on $0{,}5y$.

Kuna hinna vahe teisel ja kolmandal nädalal oli sama suur kui hinna vahe teisel ja neljandal nädalal, siis:

$$y - 0{,}9x = 0{,}9x - 0{,}5y,$$

$$1{,}5y = 1{,}8x,$$

millest $0{,}5y = 0{,}6x$, ehk hind neljandal nädalal moodustab 60% esialgsest hinnast ning

neljandal nädalal oli hind 40% soodsam võrreldes esialgse hinnaga.

Hindamine:

Võrrandi y – 0,9x = 0,9x – 0,5y koostamine.	3p
Võrrandi lahendamine ja $0{,}5y$ avaldamine x kaudu.	2p
Õige lõppvastus.	2p
	7p

2.

Lahendus:

Paneme tähele, et tõestamist vajav võrratus on samaväärne võrratusega

$$4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 > 0.$$

Saadud võrratuse vasakut poolt teisendades saame:

$$4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = \left(2x^2 - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 + 3x^2 - 4x + 5 =$$
$$= \left(2x^2 - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 + 2x^2 + (x-2)^2 + 1 = \left(2x^2 - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}x^2 + (x-2)^2 + 1.$$

Kuna arvu ruut on alati mittenegatiivne ja mittenegatiivsete arvude summa on ka mittenegatiivne, siis

$$\left(2x^2 - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}x^2 + (x-2)^2 \geq 0 \text{ iga } x\epsilon\mathbb{R} \text{ korral.}$$

Järelikult $4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = \left(2x^2 - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}x^2 + (x-2)^2 + 1 \geq 1 > 0$

iga $x\epsilon\mathbb{R}$ korral.

Hindamine:

Idee esitada avaldis täisruutude summana.	1p
Täisrudu $\left(2x^2 - \frac{x}{2}\right)^2$ avaldamine.	2p
Täisruudu $(x-2)^2$ avaldamine.	2p
Tõestuse lõpuni viimine	2p
	7p

3.

Lahendus:

Olgu $n = 2022$.

Siis on $2020 \cdot 2021 \cdot 2022 \cdot 2023 + 1 = (n-2)(n-1)n(n+1) =$

$$= (n^2 - 3n + 2)(n^2 + n) + 1 = n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n + 1 = (n^2 - n - 1)^2.$$

Seega on $2020 \cdot 2021 \cdot 2022 \cdot 2023 + 1 = (2022^2 - 2022 - 1)^2 = 4086461^2$

Hindamine:

On aru saadud, et tuleb leida arv või arvavaldis, mille ruut võrdub antud arvavaldisega. 1p

On valitud üks arvudest 2020, 2021, 2022 või 2023 ning avaldatud ülejäänud kolm arvu valitud arvu kaudu. 2p

Ülesande tekstis toodud korrutis on avaldatud vaid ühe kaudu arvudest 2020, 2021, 2022 või 2023. 2p

On näidatud, et saadud avaldis osutub mingi täisarvu ruuduks. 2p

7p

Märkus: kui väidetakse ilma lisaselgitusteta, et ülesande tekstis toodud avaldis on võrdne arvu 4086461 ruuduga, siis anda lahenduse eest vaid 2 punkti.

4. Vastus: $\frac{|LD|}{|AD|} = \mathbf{tan^2}\boldsymbol{\alpha}$

<u>Lahendus:</u>

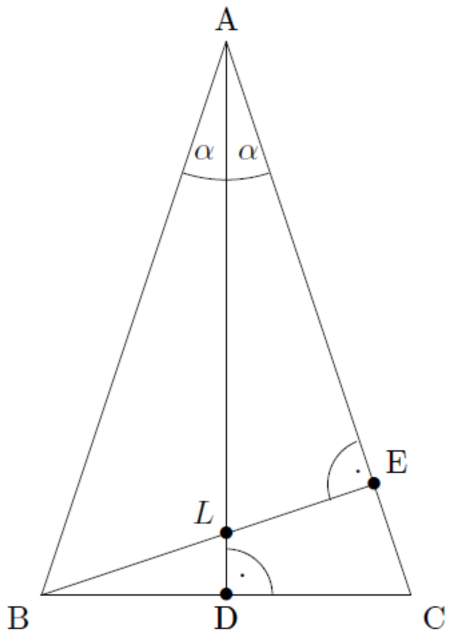
Kolmnurga võrdhaarsuse tõttu on kolmnurga ABC alusnurgad võrdsed, st $\angle ABC = \angle ACB$ ning $\angle ABC + \angle ACB = 180° - \angle BAC = 180° - 2\alpha$.

Kuna kolmnurk ABC on teravnurkne, on $\angle BAC = 2\alpha < 90°$ ja $\alpha < 45°$.

Seega $2 \cdot \angle ABC > 180° - 90° = 90°$ ja alusnurkade ABC ja ACB suurus ületab 45° ning on suurem poolest tipunurgast.

Võrdhaarses kolmnurgas ABC jaotab tipunurga tipust tõmmatud kõrgus AD kolmnurga ABC kaheks võrdseks kolmnurgaks.

Seega $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$
ning $\angle ABD = \angle ACD = 90° - \alpha$.
Täisnurkses kolmnurgas AEL on $\angle LAE = \alpha$ ja seega $\angle ALE = 90° - \alpha$.



Täisnurkses kolmnurgas LDB on $\angle BLD = \angle ALE = 90° - \alpha$ (tippnurgad) ja seega $\angle LBD = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$.

Järelikult on kolmnurgad AEL ja BDL sarnased kolmnurgaga ADB (tunnus NNN) Sarnasuse tõttu on $\frac{LD}{BD} = \frac{BD}{AD} = \tan\alpha$.

Seega $\frac{LD}{AD} = \frac{LD}{BD} \cdot \frac{BD}{AD} = \tan\alpha \cdot \tan\alpha = \tan^2\alpha$.

<u>Hindamine:</u>

On tehtud ülesande tingimustele vastav joonis.	1p
Kasutades kolmnurga võrdhaarsust ja teravnurksust on näidatud, et alusnurk on suurem poolest tipunurgast.	2p
On näidatud vajalike kolmnurkade sarnasus.	2p
On leitud sarnasustegur.	1p
On avaldatud suhe $\frac{LD}{AD}$ nurga α kaudu.	<u>1p</u>
	7p

5. Vastus: **Mäng jääb viiki**

Lahendus:

Märkame, et kuna 26 > 21, siis Indrek saab igast kuhjast võtta münte maksimaalselt ühel korral.

Kui Indrek võtab münte vähemalt 9 kuhjast, siis ta kindlasti võidab.

Selleks, et Indrek ei saaks võtta konkreetsest kuhjast münte, peab Peeter võtma münte sellest kuhjast 3 korda ilma, et Indrek vahepeal võtaks sellest münte.

Kui Indrek võtab mingist kuhjast münte, siis Peetril pole mõtet sellest kuhjast münte võtta kuni mängu lõpufaasini, kuna Indrek ei saa enam münte sealt võtta.

Kuna Peeter võtab münte kahest kuhjast, Indrek aga vaid ühest, siis sõltumata sellest, kuidas Indrek käib, on Peetril alati võimalus mitte lasta Indrekul võtta münte kahest kuhjast ehk Indrek saab maksimaalselt võtta münte 8 kuhjast.

Selleks Peeter, näiteks, võtab münte kahest võrdse müntide arvuga kuhjast, kus müntide arv on hetkel suurim. Seis peale esimest Peetri käiku:

17, 17, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 21

Indrek saab võtta münte kas kuhjast, kus on 17 münti või kuhjast, kus on 21 münti.

Peeter aga võtab münte kahest kuhjast, kus on 21 münti.

Hiljemalt selleks hetkeks, kui mõlemad poisid on teinud 4 käiku tekib olukord, kus on olemas vähemalt 4 kuhja, milles on 17 münti.

Edasi võtab Peeter kaks korda oma käigu ajal münte kahest kuhjast, milles on 17 münti. Siis tekib vähemalt kaks kuhja, milles on 13 münti.

Ja lõpuks võtab münte kuhjadest, milles on 13 münti, mis tähendab, et Indrek ei saa enam sealt münte võtta.

Peeter	4	4	4	17	17	17	17	17	21	21
Indrek	4	4	4	4	17	17	17	17	21	21
Peeter	4	4	4	4	13	13	17	17	21	21
Indrek	4	4	4	4	0	13	17	17	21	21
Peeter	4	4	4	4	0	13	13	13	21	21
Indrek	4	4	4	4	0	13	0	13	21	21
Peeter	4	4	4	4	0	9	0	9	21	21

Nüüd näitame, et kui Indrek võtab münte kuhjadest, kust Peeter juba on münte võtnud, siis Peetril pole võimalik tekitada olukorda, kus ta ei laseks Indrekul võtta münte kolmest kuhjast:

Selleks, et Peeter saaks võtta kolmest kuhjast münte 3 korda, on vaja $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ münti ning vähemalt 5 käiku.

Lisaks võtab peale igat käiku Indrek samuti münte kuhjadest, kust Peeter on juba münte võtnud.

See tähendab, et peale 4 käiku on Peeter võtnud $4 \cdot 8 = 32$ münti ning kuna Indrek võtab münte kuhjadest, kust Peeter juba võttis münte, siis vähemalt $4 \cdot 4 = 16$ münti on „läinud raisku“ (ehk olid kuhjades, kust Indrek võttis münte) ja nüüd on vaja veel võtta vähemalt 20 münti ja teha veel vähemalt 3 käiku.

Peale 6 käiku on Peeter võtnud $6 \cdot 8 = 48$ münti ning vähemalt 24 on „läinud raisku“ (sest Indrek võtab münte kuhjadest, kust Peeter juba münte võttis).

Märkame, et 6 Peetri käigu jooksul tekib vähemalt üks kuhi, kus müntide arv on 13. (Kokku on 10 kuhja ja Peeter võtab 4 münti 12 korda). Järelikult, peale 6 käiku läheb „raisku“ veel 4 münti (sest Indrek võtab münte kuhjast, kust Peeter võttis 4 münti kaks korda).

Peale 7 käiku on Peeter võtnud $7 \cdot 8 = 56$ münti ning vähemalt 32 on „läinud raisku“.

Kuna Indrek on teinud samuti 7 käiku ja ühe käiguga Peeter ei saa 12 münti võtta, siis ei saa Peeter tekitada olukorda, kus ta ei laseks Indrekul võtta münte kolmest kuhjast.

Järelikult võtab Indrek mängu jooksul $8 \cdot 13 = 104$ münti.

Peetri võetud müntide arv on $210 - 104 - 2 = 104$ (igasse kuhja, kust Indrek ei saanud münte võtta jäi alles 1 münt).

Müntide arv on võrdne ehk mäng jääb viiki.

Hindamine:

Tõestamine, et Peeter saab käia nii, et Indrek ei saaks kahest kuhjast münte võtta.	3p
Tõestamine, et Peeter ei saa teha nii, et Indrek ei saaks kolmest kuhjast münte võtta.	3p
Õige vastus.	1p
	7p